**ETSI de CAMINOS, C. Y P. DE MADRID** **Examen Final Ordinario**
Segundo Curso – MÉTODOS - Matemáticas 29 de junio de 2011

Alumno_____ nº matrícula: | | | | | | |

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

---

**Ejercicio nº 4 .- (A)** Considérese el campo $\vec{u} = \rho\cos\theta\vec{g}_\rho + f(\theta)\vec{g}_\theta$ definido en el plano. Se pide:

1) Calcular la función *f* tal que *f*(0) = 0 y el campo $\vec{u}$ sea de divergencia nula. [3 puntos]

2) Para esta función *f* calcular un potencial vector del campo $\vec{u}$ y la ecuación de sus líneas de corriente. [3 puntos]

**(B)** Calcular el flujo del campo $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + xe^y\vec{k}$ a través de las superficies $S: \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x - y = 0\}$ y $S^*$: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - y > 0\}$. [4 puntos].

---

**Solución:** (ver Práctica 4, ejercicio 26)

**(A)** 1) La divergencia de $\vec{u}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho f(\theta)\right)\right] = 2\cos\theta + f'(\theta)$

de donde $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow f'(\theta) = -2\cos\theta$

luego $f(\theta) = -2\,\mathrm{sen}\theta + \text{cte.} = -2\,\mathrm{sen}\theta$ (constante de ajuste nula pues *f*(0) = 0)

2) Se observa que el campo $\vec{u}$ es continuo en $\mathbf{E}_2$ admitiendo que $\vec{u}(0,0) = \vec{\mathbf{0}}$ (ya que $|\vec{u}| \to 0,\ \text{cuando}\ \rho \to 0$). El dominio, pues, es $\Omega = \mathbf{E}_2$, que es *simplemente conexo*. Por lo tanto el campo admite potencial vector en $\mathbf{E}_2$ y puede tomarse uno de la forma $\vec{w} = \Psi(\rho,\theta)\vec{k}$, donde $\Psi$ puede obtenerse por la integral: $\psi(\rho_0,\theta_0) = \int_C \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,s$,

siendo *C* cualquier camino en $\Omega$ que una el origen de integración, en este caso el origen O(0,0), con el punto genérico $(\rho_0,\theta_0)$, y siendo $\vec{n}$ la normal del camino *C* que señala a la derecha del avance. Así, tomando *C* el segmento $OP_0$, o sea $C: \{\rho = t\ ,\ \theta = \theta_0;\ 0 \le t \le \rho_0\}$, se tiene:

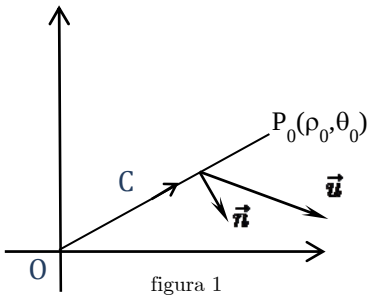


figura 1

$\vec{n} = -\underline{e}_\theta$ ; $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$ ; $\vec{u}(t,\theta_0) = t\cos\theta_0\,\vec{g}_\rho - 2\mathrm{sen}\theta_0\,\vec{g}_\theta$

luego (figura 1):

$$\psi(\rho_0,\theta_0) = \psi(0,0) + \int_C \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,s = \psi(0,0) + \int_0^{\rho_0} 2t\,\mathrm{sen}\,\theta_0\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow$$

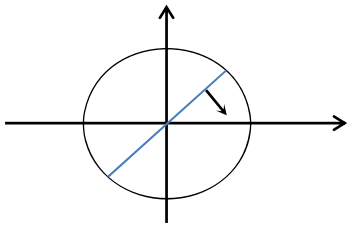
$$\psi(\rho,\theta) = \psi(0,0) + (\rho_0)^2\,\mathrm{sen}\theta_0$$

Tomando $\psi(0,0) = 0$, resulta un potencial vector de $\vec{u}$:

$$\vec{w}(\rho,\theta) = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{k}$$

Las líneas de corriente de $\vec{u}$ tienen por ecuaciones $\psi(\rho,\theta) = \text{cte.}$, y en este caso: $\rho^2\,\mathrm{sen}\theta = c \Leftrightarrow \rho = \frac{\pm c}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}}$ #.

**(B)** El campo $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + xe^y\vec{k}$ es regular de $\mathcal{C}^\infty$ y adivergente. Las dos superficies comparten su borde,



que es la circunferencia meridiana de la esfera unidad en el plano $\{y = x\}$:

$\partial S = \partial S^* = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y = x\}$

Siendo el campo obviamente adivergente, dará el mismo flujo a través de ambas superficies, como consecuencia del teorema de Gauss (aplicado al volumen encerrado entre ambas superficies).

Tomando *S*, que se encuentra en el plano $\{x - y = 0\}$, de normal $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ (sentido hacia *S**, que se encuentra en el semiplano $\{x > y\}$), resulta: $\int_S \vec{v}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}\,S = \int_S \sqrt{2}\,\mathrm{d}\,S = \sqrt{2}\,\pi = \int_{S^*} \vec{u}\cdot\vec{N}^*\mathrm{d}S^*$ #.

---